

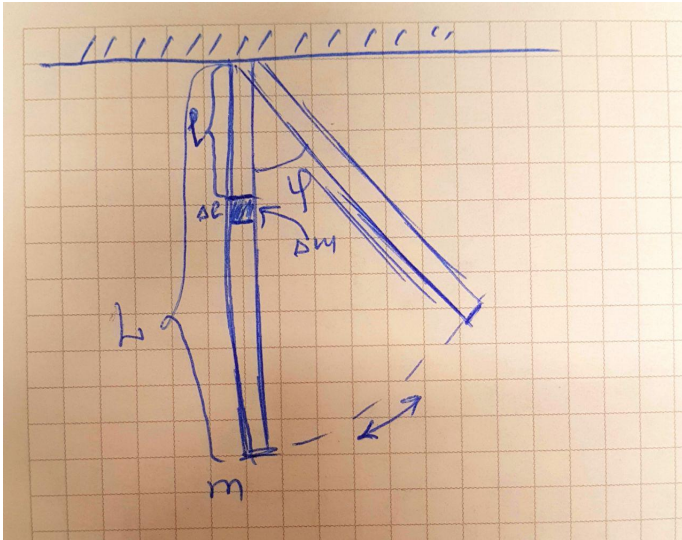
Билет 20

Напишите уравнение Лагранжа для массивного стержня длины L и массы m с закрепленным концом, колеблющегося в вертикальной плоскости, и оцените частоту его колебаний.

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \forall i = 1, \dots, N$$

где q_i – обобщенные координаты точек тела. Соответственно $L(q, \dot{q}, t)$ – ф-я Лагранжа.



Разобьем стержень на малые части массой Δm длиной Δl , $\Delta m = \rho S \Delta l$. Тогда каждую часть можно представить как математический маятник, и для него:

$$U = \Delta mgh = \Delta mgl(1 - \cos\varphi)$$

И соответственно ф-я Лагранжа:

$$\Delta L = \frac{\Delta m(l\dot{\varphi})^2}{2} - \Delta mgl(1 - \cos\varphi) = \rho S \Delta l \left(\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi) \right)$$

Чтобы получить ф-ю Лагранжа для целого стержня, надо просуммировать ΔL по всем частям (т.е. проинтегрировать):

$$L = \int_0^l \rho S \left(\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi) \right) dl = \rho S \left(\frac{L^3 \dot{\varphi}^2}{3 \cdot 2} - \frac{gL^2}{2}(1 - \cos\varphi) \right) = \frac{m(L\dot{\varphi})^2}{3 \cdot 2} - \frac{mgl}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Подставляем это в уравнение Лагранжа, получаем:

$$m \frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} = -mg \frac{L}{2} \sin\varphi$$

Отсюда ур-е колебания маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2L} \sin\varphi = 0$$

Частота колебаний $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$